



# Lógica Computacional

## ICI-242

### PUCV

Franklin Johnson Parejas  
Fjohnsonp@yahoo.es



# Composición de Relaciones

- Sean  $A, B, C$  conjuntos. Se definen las relaciones  $xRy$ ,  $yRz$ , donde  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $z \in C$
- La composición de  $R$  y  $S$  contiene los pares  $(x,y)$  si y solo si existe un objeto intermedio, tal que  $(x,y)$  esta en  $R$  e  $(y,z)$  esta en  $S$ .

Notación:  $R \circ S$

- $X(R \circ S)Z = \{ \exists y / (xRy \text{ e } yRz) \}$

Ejemplo:  $(x,y) R = \{(a,b)(a,d)(b,c)(c,e)\}$

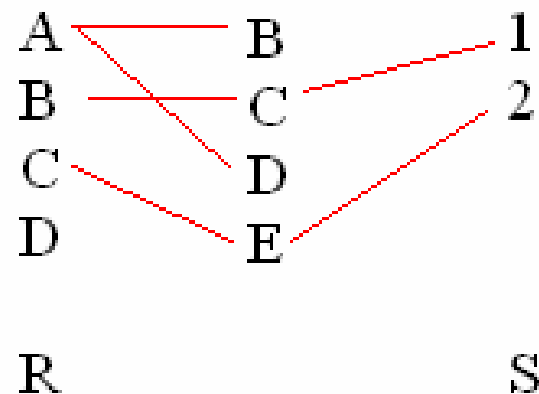
$(y,z) S = \{(c,1)(e,2)\}$

$(x,z) R \circ S = \{(b,1)(c,2)\}$

# Representación de composición de funciones

La composición de 2 relaciones se puede representar mediante un grafo que:

- A la izquierda se dibujan los nodos de A
- A la derecha se dibujan los elementos del conjunto c
- En el centro los elementos intermediarios





# Propiedades

- **Relación Reflexivas:** Una relación  $R$  de  $A$  se dice que es reflexiva si en cada  $x$  perteneciente a  $A$ , el par  $(x,x)$  esta en la relación.
- $R$  es reflexiva = Para todo  $x \in A$  se tiene  $xRx$
- $\text{Dom}(R)=\text{Ran}(R)=A$

Ejemplo:  $A=\{2,4,6\}$

- $R=\{(2,2)(2,4)(2,6)(4,4)(4,6)(6,6)\}$  Reflexiva
- Notación: matricial y grafo.
- $R=\{(1,1)(5,3)(5,5)(3,1)\}$  No Reflexiva



# Propiedades

- Existe algunos casos donde  $R$  no contiene ningún elemento de la forma  $xRx$ , en ese caso se dice que la relación es **irreflexiva**
- $R$  es irreflexiva  $\rightarrow$  para todo  $x \nexists xRx$ .

Ejemplo:

- $R = a < b$  y  $a > b \rightarrow$  es irreflexiva



# Propiedades

- **Relación Simétrica:** Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  es simétrica siempre que  $xRy$  entonces existe  $yRx$ .
- $R$  es simétrica si  $\forall x$  y  $\forall y$  se tiene  $(xRy \rightarrow yRx)$

Ejemplo:  $A = \{(1,2)(2,1)\}$      $1R2 \rightarrow 2R1$

- 1)  $R$  Relación Hermano = simétrica
- 2)  $R$  Relación Padre = No simétrica



# Propiedades

- Una relación  $R$  sobre  $A$  se dice que es asimétrica si y solo si  $\exists xRy$  y no existe  $yRx$ .

Ejemplo:

$R=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$  Asimetrica

$R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4)\}$  No Simetrica



# Propiedades

- **Antisimétrica:** Una relación  $R$  sobre  $A$  se dice que es antisimétrica si en todos los casos en que  $xRy$  e  $yRx$  se dice que  $x=y$ ,  $y=x$  están relacionados.
- Si  $x$  diferente a  $y$  entonces
  - $x$  no relacionado y ó
  - $y$  no relacionado  $x$

$$xy \in A (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y).$$

Ejemplo:

1.  $R = xRy$  donde  $a \leq b$  y  $b \leq a \rightarrow a = b$  Antisimétrica
2.  $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$  Antisimétrica
3.  $R = \{(4,6)(2,2)(6,4)(4,2)\}$  no es antisimétrica



# Propiedades

- Matricialmente
- $MR \rightarrow$  Relación es simétrica si :
  - $M_{ij}=1 \rightarrow M_{ji}=1$
- $MR \Rightarrow$  Relación es asimétrica si:
  - $M_{ij} = 1 \rightarrow M_{ji}=0$
- $MR \Rightarrow$  Relación es antisimétrica si:
  - $i \neq j \ M_{ij} = 0 \text{ ó } M_{ji}=0$



# Propiedades

**Transitividad:** Una relación  $R$  sobre  $A$  se dice que es transitiva si se tiene  $xRy$  e  $yRz$ .

Entonces existe  $xRz$

Ejemplo:  $A=\{1,2,3,4\}$   $R=\{(1,2)(2,3)(1,3)\}$

■  $MR \rightarrow$  Relación transitiva si:

□  $M_{ij}=1 \rightarrow M_{jk}=1$ , entonces  $M_{ik}=1$

■  $A=\{a,b,c\}$   $Mr=$

1	1	1
0	1	1
0	0	1



# Propiedades

- Ejemplo:

1. Sea  $A=\{2,3,4,6\}$

- $R1=\{(2,2)(2,3)(4,6)(6,2)(4,2)(4,3)(6,3)\}$

Transitiva

- $R2=\{(2,2)(4,4)(4,2)(2,6)(6,2)(6,4)\}$

No transitiva



# Propiedades

- **Relación de Equivalencia:** Una relación  $R$  es una relación de equivalencia si y solo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: Sea  $A = \{1, 2, 3\}$

$R: aRb$  donde  $a=b$   $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$



# Ejercicios

1) Sea  $A:\{a,b,c,d,e\}$  determine si la siguiente relación son o no equivalentes.

$$R=\{(a,a),(a,c),(a,b),(a,e),(b,c),(d,b),(d,d),(d,e)\}$$

$$R=\{(b,a)(b,e)(c,a)(c,e)(d,a)(d,e)\}$$

2) Sea  $A=Z$   $xRy \Leftrightarrow |y-x|\leq 1$

3) Sea  $A=Z^+$   $xRy \Leftrightarrow x=y$

4) Indique las propiedades que representan las siguientes relaciones.

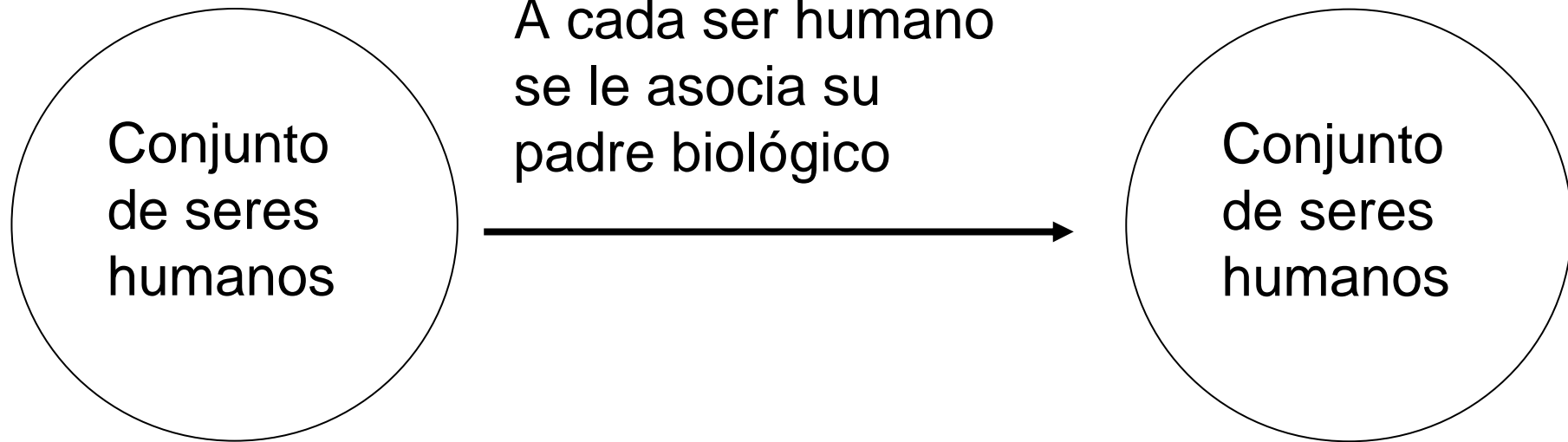
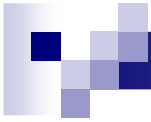
a)  $x$  e  $y$  enteros y sea  $xRy$ , tal que  $x$  es múltiplo de  $y$

b)  $x$  e  $y$  estudiantes universitarios, sea  $xRy$  tal que  $x$  e  $y$  pertenecen a la misma universidad.



# Funciones

- $R \subset A \times B$  /  $(x,y)$  condición
- Sean  $A$  y  $B$  2 conjuntos no vacíos no necesariamente distintos y sea  $f$  una regla que hace corresponder a cada elemento  $x$  perteneciente a  $A$  un único elemento  $y$  perteneciente a  $B$ .
- Donde  $\forall x$  en  $F(x)=y$   
 $F: A \rightarrow B$  como “Función de  $A$  en  $B$ ”  
 $X \rightarrow Y = F(X)$   
 $F = \{(x,y) / y = F(x), x \text{ pertenece a } A\}$



- Todo elemento del dominio tiene asociado un único elemento del contradominio. Todo ser humano tiene un único padre biológico
- No todo elemento del contradominio tiene asociado un elemento del dominio. No todo ser humano es un padre biológico



# Funciones

- De acuerdo a la definición de función podemos definir dominio y codominio como:
- Dominio= (A) todos los elementos de A
- Codominio= (B) Todos los elementos de B
- Recorrido=(Rango) /  $P \subset B \rightarrow P=F(A)$



# Funciones

## ■ Ejemplo:

Sea  $F$  una función que asigna a cada persona el mes que nació.

Marco = Enero  $\rightarrow F(\text{marco}) = 1$

Andrés = Marzo  $\rightarrow F(\text{Andrés}) = 3$

Paula = Mayo  $\rightarrow F(\text{Paula}) = 5$

Dominio de  $F \rightarrow \text{Dom}(F) = A = \{\text{marco, claudio, Paula}\}$

Codomio de  $F \rightarrow \text{Cod}(F) = B = \{\text{enero, febrero, marzo, ..., diciembre}\}$

Recorrido  $F = \text{Rec}(F) = \{\text{enero, marzo mayo}\}$

## ■ Ejemplo 2

$A = \{a, b, c, d\}$   $B = \{1, 2, 3, 4\}$   $F = \{(a, 1)(b, 2)(c, 3)(c, 4)\}$

$\text{Dom}(F) = A$  ,  $\text{Cod}(F) = \text{Rec}(F) = B$



# Funciones

- Todos los elementos del dominio tiene que tener asociado un elemento del contradominio
- A un elemento del dominio se le asociara un único elemento del contradominio
- Elementos del contradominio pueden tener asociados más de un elemento del dominio



# Propiedades

**Inyectiva:** Sea  $F$  una función de  $A$  en  $B$ .

$$F: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow F(x) = Y$$

■  $F$  es inyectiva si y solo si:

$$F(x_1) = F(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in A \text{ ó}$$

$$x_1 \text{ distinto de } x_2 \rightarrow F(x_1) \text{ distinto de } F(x_2)$$

■ Ejemplo:

$$A = \{ a, e, i \} \quad B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$$

$$f = \{ (a, 7), (e, 1), (i, 5) \}$$



# Propiedades

- Entonces  $f$  es una función inyectiva , si y sólo si cada elemento de  $B$  es imagen de a lo más un elemento de  $A$  bajo  $f$  .
- Obs: Cuando el recorrido de  $f$  es igual a  $B$  es decir cuando todos los elementos de  $B$  es imagen de un elemento de  $A$  se dice que es **Sobreyectiva o epiyectiva**.

Ejemplo:  $A = \{ a , e , i , o , u \}$   $B = \{ 1 , 3 , 5 , 7 \}$

- $f = \{ ( a , 1 ) , ( e , 7 ) , ( i , 3 ) , ( o , 5 ) , ( u , 7 ) \}$

entonces,  $f$  es una función epiyectiva , si y sólo si cada elemento de  $B$  es imagen de al menos un elemento de  $A$  , bajo  $f$  .

$F: A \rightarrow B$  y  $\{ \forall y \in B, \exists x \in A / F(x)=y \}$



# Propiedades

- **Biyectiva:** sea  $F$  una función de  $A$  en  $B$  se dice biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo:

$$A = \{ a , e , i , o , u \} \quad B = \{ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$$

$$f = \{ ( a , 5 ) , ( e , 1 ) , ( i , 9 ) , ( o , 3 ) , ( u , 7 ) \}$$



## ■ **Función Inversa**

■ A toda función Biyectiva es posible asociarle una “función inversa” denotada por  $F^{-1}$

■  $F(x): Y=3x+5$

■  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

■  $F^{-1}(x) = (X-5)/3$



# Ejercicios

- Determine si cada una de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
  - $A=B=\{a,b,c,d\}$   $F=\{(a,a),(b,c),(c,d),(d,b)\}$
  - $A=\{1,2,3\}$   $B=\{a,b,c,d\}$   $F=\{(1,a),(2,a),(3,c)\}$
  - $A=\{1/4,1/6,1/8\}$   $B=\{x,y,z,w\}$   $F=\{(1/4,x)(1/6,y)(1/8,w)\}$
  
- Determinar  $\text{Dom}(f)$ ,  $\text{Rec}(F)$ ,  $\text{Cod}(F)$ , y analizar las propiedades de las siguientes funciones
- $F(x)=|x|$
- $P=Q=Z$       $F(x)=x^3 - x$
- $F(x)=5$
- $\sqrt{x}$